Задаци са Општинског такмичења из математике

1. Израчунај вредност израза:

а) 438 + 162 : 6

б) 60 : 6 + 4 · 123

2. Квадрат је двема правама подељен на два квадрата и два правоугаоника. Обими новодобијених квадрата су 64cm и 24cm. Израчунај обим првобитног (највећег) квадрата.

3. Нађи збир највећег и најмањег троцифреног броја записаног цифарама 6, 2 и 0 ако се цифре:

а) не могу понављати

б) могу понављати

4. Три другарице Милена, Јована и Ивана су заједно имале 980 динара. Прво су ишле у биоскоп и свака је платила своју карту. Затим су отишле у продавницу и потрошиле Милена 168, Јована 109 и Ивана 123 динара. На крају им је остало заједно 130 динара. Колика је цена једне биоскопске карте?

3	2	5	30
4	1	3	12
2	1	5	10
24	2	75	

5. Бројеви у квадрату и поред квадрата су уписани тако да је производ у свакој врсти и свакој колони једнак одговарајућем броју поред квадрата (види решен пример).

У празна поља квадрата упиши бројеве који недостају тако да важи исто правило као у наведеном примеру.

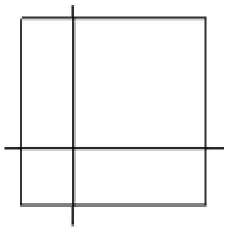
			2
			9
			35
3	15	14	

Решења задатака са Општинског такмичења из математике

1. а) $438 + 162 : 6 = 438+27 = 465$; б) $60 : 6 + 4 \cdot 123 = 10+492 = 502$.

64cm

24cm



Бодови: а) 5 +5 б) 5+5 (20)

2. Страница већег квадрата је 64 : 4, тј. 16cm, а страница мањег квадрата је 6cm. Страница највећег квадрата је 16+6, тј. 22cm. Онда је обим 88cm.
Бодови: страница већег квадрата 5, страница мањег 5, страница највећег 5, обим највећег квадрата 5. (20)

3. а) $620 + 206 = 826$; б) $666 + 200 = 866$.
Бодови: а) 4+4+2 , б) 4+4+2 (20)

4. Ако је цена карте x онда су заједно потрошиле на карте за биоскоп 3x динара.

$3x + (168 + 109 + 123) + 130 = 980$

$3x = 980 - 530$

$3x = 450$

$x = 150$.

Цена једне биоскопске карте је 150 динара.
Бодови: Тачан поступак и грешка у рачуну 15
Тачан поступак и рачун 20.

1	1	2	2
3	3	1	9
1	5	7	35
3	15	14	

5. Бодови: Пет тачно попуњених поља 10.
Тачно попуњена сва поља 20.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

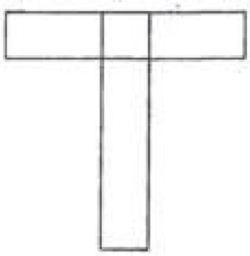
11.03.2006.

4. РАЗРЕД

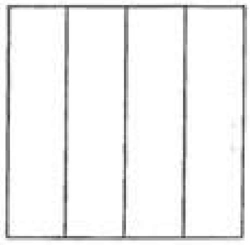
1. Одредити разлику највећег и најмањег шестоцифреног броја записаних помоћу цифара $0, 2, 3, 6, 7$ и 9, тако да се свака цифра појављује у сваком од бројева тачно једном.

2. Ако су x и $x - 2006$ природни бројеви, колико решења има неједначина $x - 2006 < 6002$?

3. Од два правоугаоника чије су дужине страница 15 cm и 3 cm делимичним преклапањем (као на слици) добијена је фигура (у облику слова Т). Израчунати обим тако добијене фигуре.



Сл. уз зад. 3



Сл. уз зад. 4

4. Квадрат је подељен на четири једнака правоугаоника (као на слици). Ако је обим једног од тако добијених правоугаоника 20 cm одредити површину квадрата.

5. Колико листова има књига ако је за нумерисање њених страна употребљено тачно 77 седмица?

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

4. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. Највећи такав број је 976320, (5 бодова) а најмањи 203679. (8 бодова) Њихова разлика је $976320 - 203679 = 772641$. (7 бодова)

2. Решења ове неједначине су сви природни бројеви већи од 2006 и мањи од 8008, тј. $x \in \{2007, 2008, \ldots, 8007\}$. (10 бодова) Тражених решења има $8007 - 2006 = 6001$. (10 бодова)

3. Преклопљени део је, очигледно, квадрат странице 3 cm. Обим добијене фигуре (у cm) је $15 + 2 \cdot 3 + 12 + 2 \cdot 12 + 3 = 60$. (20 бодова)

4. Ако дужину краће странице правоугаоника означимо са x (у cm), онда је дужина дуже странице тог правоугаоника једнака $4x$. Како је његов обим 20 cm, следи да је $2 \cdot (4x + x) = 20$, односно $x = 2$. (10 бодова) Дужина странице квадрата је $4x$, тј. 8 cm, (5 бодова) а његова површина 64 cm^2. (5 бодова)

5. За нумерацију првих 100 страна употребљено је 20 седмица, и то за нумерацију следећих страна: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87 и 97. (5 бодова) Слично, за нумерацију наредних 200 страна употребљено је још 40 седмица, тако да је остало 17 седмица. (5 бодова) Значи да књига има 378 страна, (5 бодова) односно 189 листова. (5 бодова)

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

11.03.2006.

5. РАЗРЕД

1. Одредити све парове цифара x и y тако да важи $\frac{x}{5} - \frac{2}{y} = \frac{4}{5}$.

2. Означимо са $*$ операцију на скуповима дефинисану са $A * B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Одредити $A * B$ ако је $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 500 \leq x \leq 2005\}$, а $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x \text{ паран}, 1000 \leq x \leq 2006\}$.

3. Збир два угла износи $\frac{8}{9}$ правог угла, а један од њих је за четвртину правог угла већи од другог. Колики су ти углови?

4. Множењем два двоцифрена броја добија се број у чијем се запису појављују једино седмице. Одредити све такве парове двоцифрених бројева.

5. У једној години је било 53 петка. Ако је 1. јануар био четвртак, који дан је био 1. април?

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

5. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. Провером за $x \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ добијају се два решења: $x = 6$, $y = 5$ и $x = 9$, $y = 2$. (свако решење по 10 бодова)

2. Како је по услову задатка $A = \{500, 501, \ldots, 2005\}$ и $B = \{1000, 1002, \ldots, 2006\}$, добијамо да је $A \setminus B = \{500, 501, \ldots, 999, 1001, 1003, \ldots, 2005\}$ (7 бодова) и $B \setminus A = \{2006\}$. (7 бодова) Следи да је $A \star B = \{500, 501, \ldots, 999, 1001, 1003, \ldots, 2005, 2006\}$. (6 бодова)

3. Означимо већи угао са α, а мањи са β. Како је $\frac{8}{9}$ правог угла $80°$, а $\frac{1}{4}$ правог угла $22°30'$, то је $\alpha = \beta + 22°30'$, а $\alpha + \beta = 80°$. Одатле следи да је $2\beta + 22°30' = 80°$, па је $2\beta = 57°30'$. (10 бодова) Коначно, добијамо да је $\beta = 28°45'$, (5 бодова) а $\alpha = 51°15'$. (5 бодова)

4. Множењем два двоцифрена броја добија се број који може имати или 3 или 4 цифре, јер је $10 \cdot 10 = 100$, а $99 \cdot 99 = 9801$. Како је $7777 = 7 \cdot 11 \cdot 101$, а 101 је прост број, следи да производ два двоцифрена броја не може бити 7777. (10 бодова) С обзиром да је $777 = 3 \cdot 7 \cdot 37$, једини двоцифрени бројеви који задовољавају услове задатка су 21 и 37. (10 бодова)

5. Сем 2. јануара који је био петак, у години је било још 52 петка, што значи да је та година имала $2 + 7 \cdot 52 = 366$ дана, тј. да је била преступна. (10 бодова) У таквој години, између 1. јануара и 1. априла има тачно $30 + 29 + 31 = 90$ дана, што значи да је 1. април 92. дан у години. Како је $92 = 7 \cdot 13 + 1$, а 1. јануар је био четвртак, следи да је 1. април био такође четвртак. (10 бодова)

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

11.03.2006.

6. РАЗРЕД

1. Одредити 2006-у цифру иза децималног зареза у децималном запису броја $\frac{21}{37}$.

2. При сабирању два децимална броја ученик је непажњом код једног од бројева померио децимални зарез за два места удесно. Услед тога је уместо резултата 62,5876 добио 295. Које бројеве је ученик требао да сабере?

3. У оштроуглом једнакокраком троуглу ABC дужина основице AB већа је од дужине крака BC. Симетрала угла на основици и висина из истог темена граде угао од $18°$. Колики је угао на основици тог троугла?

   $AB > BC$

4. Нека је $ABCD$ правоугаоник ($AB > CD$), а тачке E и F су такве да су троуглови AED и CDF једнакостранични и тачка E припада унутрашњости и правоугаоника $ABCD$ и троугла CDF. Доказати да је троугао BEF једнакостраничан.

5. Таблица 5×5 попуњена је на произвољан начин бројевима из скупа $\{-1, 0, 1\}$. Посматрају се збирови тих бројева по врстама, колонама и обе дијагонале таблице. Доказати да међу њима бар два морају бити једнака.

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

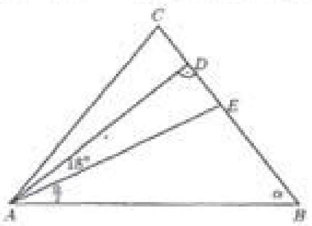
6. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

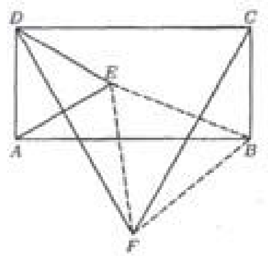
1. Како је $\frac{21}{37} = 0,\overline{567}$, (5 бодова) а $2006 = 3 \cdot 668 + 2$, на 2006-ом месту иза децималног зареза налази се цифра 6. (15 бодова)

2. Нека је ученик требао да сабере бројеве x и y. По услову задатка је $x + y = 62,5876$. Како се померањем децималног зареза за два места удесно број повећа 100 пута, то је $x + 100y = 295$. (5 бодова) Даље добијамо да је $99y = 295 - 62,5876$, па је $y = 2,3476$, а $x = 60,24$. (15 бодова)

3. Нека су D и E тачке у којима висина из темена A, односно симетрала угла код темена A секу крак BC. Угао на основици обележимо са α. Како је AE симетрала угла код темена A, то је $\angle BAE = \frac{\alpha}{2}$, па је $\angle BAD = \frac{\alpha}{2} + 18°$. Троугао ABD је правоугли, па је $\angle BAD + \angle ABD = 90°$, тј. $\frac{\alpha}{2} + 18° + \alpha = 90°$. Следи да је $\frac{3}{2}\alpha = 72°$, односно $\alpha = 48°$. (20 бодова)



4. Како је $\angle BCF = 90° - \angle FCD = 30°$ и $\angle EDF = \angle EDA - \angle FDA = 60° - (90° - \angle CDF) = 30°$, то су ова два угла једнака. Такође је $BC = AD = ED$ и $CF = DF$, па на основу става СУС следи да је $\triangle\ BCF \cong \triangle\ EDF$. Одатле је $FB = FE$. (10 бодова) Како је и $\angle CFB = \angle DFE$, добијамо да је $\angle EFB = \angle DFC = 60°$. Према томе, $\triangle\ BEF$ је једнакокраки са углом између кракова од 60°, па је једнакостраничан. (10 бодова)



5. Сабирајући 5 сабирака из скупа $\{-1, 0, 1\}$ могуће је добити 11 збирова, и то: $-5, -4, \ldots, 4, 5$. Како врста, колона и дијагонала у таблици има 12, по Дирихлеовом принципу бар два збира морају бити једнака. (20 бодова)

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

11.03.2006.

7. РАЗРЕД

1. Израчунати вредност израза $\frac{a^2+b^2}{ab}$ ако се зна да је $\frac{a+b}{b} = 2 - \sqrt{2}$.

2. Нека су a и b дужине основица AB и CD, а c дужина крака једнакокраког трапеза $ABCD$ са узајамно нормалним дијагоналама. Доказати да је $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

3. Нека је $a = 2^{2005} - 2^{2004} + 2^{2003}$, $b = 2^{2004} - 2^{2005} + 2^{2006}$, а $c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2003}$. Доказати да је збир квадрата нека два од бројева a, b, c једнак квадрату трећег.

4. Нека су P и R тачке страница AB и CD паралелограма $ABCD$ и нека је $\{Q\} = PC \cap BR$ и $\{S\} = AR \cap DP$. Доказати да је површина четвороугла $PQRS$ једнака збиру површина троуглова ASD и BCQ.

5. Бројеви $1, 2, \ldots, 9$ су подељени у три групе. Доказати да бар у једној од тих група производ бројева није мањи од 72.

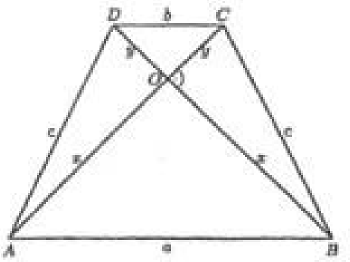
Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

7. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

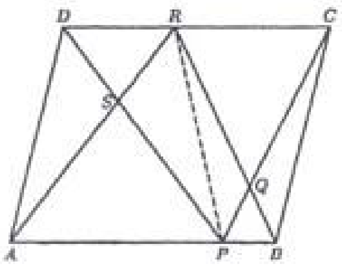
1. Из $\frac{a+b}{b} = 2 - \sqrt{2}$ следи да је $\frac{a}{b} + 1 = 2 - \sqrt{2}$, тј. $\frac{a}{b} = 1 - \sqrt{2}$. (6 бодова) Одатле је $\frac{b}{a} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -(1+\sqrt{2})$. (6 бодова) Како је $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, (5 бодова) вредност датог израза је $(1-\sqrt{2}) + (-1-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$. (3 бода)

2. Нека је тачка O пресек дијагонала датог трапеза и нека су x и y дужине дужи AO и CO. Тада су и дужине дужи BO и DOtakoђе x и y. Како су троуглови ABO, CDO и BCO правоугли, користећи Питагорину теорему добијамо да је $a^2 = 2x^2$, $b^2 = 2y^2$ и $c^2 = x^2 + y^2$. (свака једнакост по 4 бода) Одатле следи да је $2c^2 = a^2 + b^2$, па је $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. (8 бодова)



3. Како је $a = 2^{2003} \cdot (2^2 - 2 + 1) = 3 \cdot 2^{2003}$, $b = 2^{2004} \cdot (1 - 2 + 2^2) = 3 \cdot 2^{2004} = 6 \cdot 2^{2003}$ и $c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2003}$, узимајући да је $2^{2003} = A$, добијамо да је $a^2 = 9A^2$, (6 бодова) $b^2 = 36A^2$ (6 бодова) и $c^2 = 27A^2$. Следи да је $a^2 + c^2 = b^2$. (8 бодова)

4. У трапезу $APRD$ троуглови APR и APD имају једнаке површине, што значи да и троуглови PRS и ASD имају једнаке површине. На исти начин се показује да и троуглови PQR и BCQ имају једнаке површине. Према томе, површина четвороугла $PQRS$ је једнака збиру површина троуглова ASD и BCQ. (20 бодова)



5. Претпоставимо супротно, тј. да је у свакој групи производ бројева мањи од 72. Тада би производ бројева у свакој од група био мањи или једнак 71, па би производ свих бројева био мањи или једнак 71^3, односно 357911. Међутим, производ бројева од 1 до 9 је 362880. Према томе, дата претпоставка није тачна, односно постоји група у којој производ бројева није мањи од 72. (20 бодова)

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

11.03.2006.

8. РАЗРЕД

1. Ако су x и a реални бројеви такви да важи $x+\frac{1}{x}=a$, изразити $x^4+\frac{1}{x^4}$ у функцији од a.
2. Одредити цифре x, y и z такве да је $\frac{1}{x+y+z}=\overline{0,xyz}$. Наћи сва решења.
3. Дужине катета правоуглог троугла ABC су a и b. Симетрала правог угла код темена C сече хипотенузу у тачки D. Израчунати дужину дужи CD.
4. Одредити све реалне бројеве a за које једначина $|x-1|+|x-2|=a$ има бесконачно много решења.
5. Одредити запремину квадра код кога су растојања од тачке пресека дијагонала до ивица једнака 7 cm, 8 cm и 9 cm.

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

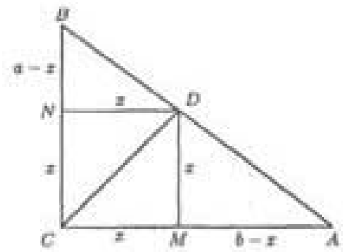
8. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. Како је $(x+\frac{1}{x})^2 = a^2$, следи да је $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$. (10 бодова) Даље је $(x^2+\frac{1}{x^2})^2 = (a^2-2)^2$, па је $x^4 + \frac{1}{x^4} = (a^2-2)^2 - 2$, тј. $x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4a^2 + 2$. (10 бодова)

2. Множењем почетне једнакости са $1000(x+y+z)$ добијамо да је $1000 = \overline{xyz} \cdot (x+y+z)$. Како је $x+y+z \leq 27$, могућа су следећа представљања броја 1000 као производа два броја: $500 \cdot 2$, $250 \cdot 4$, $200 \cdot 5$, $125 \cdot 8$, $100 \cdot 10$, $50 \cdot 20$ и $40 \cdot 25$. Провером налазимо да је једино решење задатка: $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$. (20 бодова; решење без образложења 5 бодова)

3. Обележимо са M и N подножја нормала из тачке D на катете AC и BC. Како дуж CD полови прав угао ACB, следи да су троуглови CMD и CND једнакокрако правоугли, па је четвороугао $MDNC$ квадрат. (5 бодова) Обележимо дужину његове странице са x. Како је површина троугла ABC једнака збиру површина троуглова CDB и ADC, добијамо да је $\frac{ab}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{bx}{2}$. Одатле следи да је $x = \frac{ab}{a+b}$. (10 бодова) Како је CD дијагонала квадрата $MDNC$, то је њена дужина $x\sqrt{2}$, тј. $\frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$. (5 бодова)



4. За $x < 1$ дата једначина је еквивалентна са $1 - x + 2 - x = a$. Следи да је $x = \frac{3-a}{2}$, па једначина има највише једно решење без обзира на a. (5 бодова) Слично, за $x \geq 2$ дата једначина је еквивалентна са $x - 1 + x - 2 = a$, па је $x = \frac{a+3}{2}$. Опет, без обзира на a једначина има највише једно решење. (5 бодова) За $1 \leq x < 2$ дата једначина је еквивалентна са $x - 1 + 2 - x = a$, односно са $a = 1$, па ако је $a \neq 1$ нема решења, а ако је $a = 1$ има бесконачно много решења. На основу сва три случаја закључујемо да дата једначина за $a \neq 1$ има највише два решења, док за $a = 1$ има бесконачно много решења. (10 бодова)

5. Растојања од пресека дијагонала до ивица квадра једнака су половинама дужина дијагонала страна квадра. Означимо дужине ивица квадра са a, b и c (у cm) тако да је $a^2 + b^2 = 14^2$, $b^2 + c^2 = 16^2$ и $a^2 + c^2 = 18^2$. (10 бодова) Из прве две једнакости добијамо да је $a^2 + c^2 + 2b^2 = 14^2 + 16^2 = 452$, па користећи и трећу једнакост израчунавамо да је $2b^2 = 452 - 18^2$. Следи да је $b^2 = 64$. Даље се лако добија да је $a^2 = 132$ и $c^2 = 192$, па је $a = 2\sqrt{33}$, $b = 8$ и $c = 8\sqrt{3}$. Запремина квадра (у cm^3) је $V = abc = 384\sqrt{11}$. (10 бодова)