

Schriftliche Prüfung

Zeit: 3 Stunden

Hilfsmittel: Formeln und Tafeln (handschriftlich ergänzt, keine Zusatzblätter)

Taschenrechner

Geodreieck

Nuklidkarte im A4-Format

Regeln: Die Blätter sind nicht zu trennen. Es darf nicht mit Bleistift oder Rotstift geschrieben oder gezeichnet werden. Falls der Platz unter einer Aufgabenstellung nicht ausreicht, kann auf der Rückseite des vorhergehenden Blattes weiter geschrieben werden. Es gibt höchstens dann volle Punktzahl zu einer Aufgabe, wenn der Lösungsweg klar ersichtlich ist. Alle Ergebnisse sind in SI-Einheiten und wissenschaftlicher Schreibweise auszudrücken (ausser etwas anderes ist verlangt).

Die „falschen Lösungen“, die angegeben sind, dienen zum Weiterrechnen, wenn ein Aufgabenteil nicht gelöst werden konnte. Die hier angegebenen Zahlen verstehen sich in SI-Einheiten.

Überblick:

Aufgabe	Thema	Punkte
1	Starrer Körper	39
2	Relativistische Kinematik	37
3	Quantenmechanik	28
4	Welle-Teilchen-Dualismus	26
5	Relativitätstheorie	7
	Gesamtpunktzahl	137

1. **Starrer Körper:** Moderne Schusswaffen haben einen sogenannten „gezogenen Lauf“. Dies bedeutet, dass die Innenwand des Laufs der Waffe schraubenförmige Rillen aufweist, die dem Projektil (das Geschoss, gemeinhin „Kugel“ genannt) eine Rotation aufzwingen. Es erhält so einen „Drall“.



Abb. 1: James Bond



Abb. 2: Gezogener Lauf

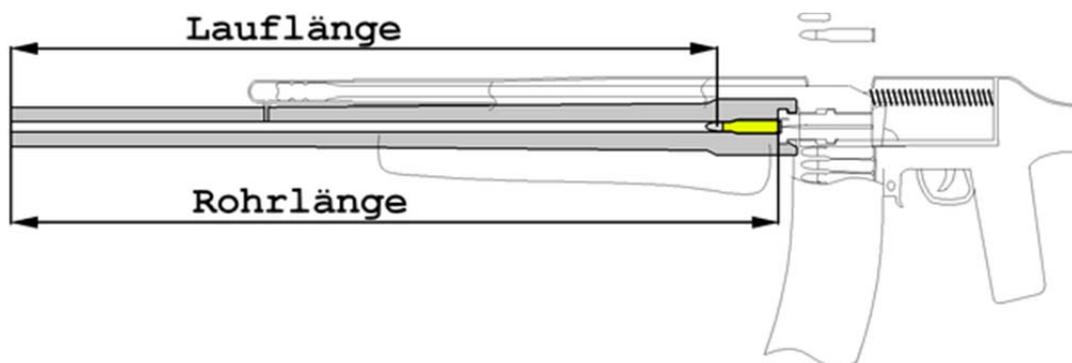


Abb. 3: Querschnitt einer Schusswaffe

1.1. [3 Punkte] Welchen Zweck verfolgt man hiermit?

1.2. [3 Punkte] Eine typische Patrone ist die „7.92 x 57 mm“. Ihr Geschoss hat einen Durchmesser von 8.22mm, und es ist 14.26g schwer. Die Patronenhülse enthält 3.05g Schiesspulver mit einem Brennwert (Einheit und Name verraten, was mit „Brennwert“ gemeint ist) von $5.94 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$.

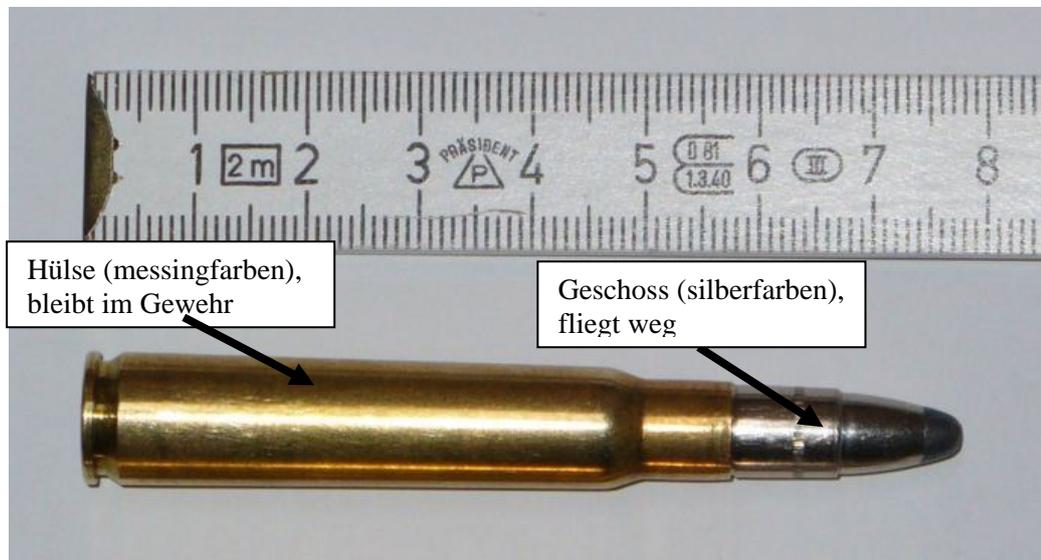


Abb. 4: Eine Patrone 7.92 x 57 mm

Wie gross ist das Trägheitsmoment des Geschosses, wenn es als zylinderförmig angesehen werden kann? (Falsche Lösung: 10^{-6})

1.3. [4 Punkte] Beim Abschuss stehen aufgrund des Rückstosses und der Wärme- und Schallentwicklung ca. 60% der frei werdenden Energie nicht für das Geschoss zur Verfügung. Wie viel Energie steht daher für Translation und Rotation des Projektils zur Verfügung? (Falsche Lösung: $3.12 \cdot 10^3$)

1.4. [4 Punkte] Bei einem gezogenen Lauf ist der „Steigungswinkel“ α eine wichtige Grösse. Die schraubenförmigen Rillen eines typischen Gewehrs bilden mit der Laufachse einen Steigungswinkel von $\alpha = 15^\circ$. Diese „Steigung“ $\alpha = 15^\circ$ bedeutet mathematisch, dass, während sich das Projektil durch den Lauf der Länge ℓ bewegt, sich der äusserste Punkt des Projektils (der den Lauf knapp berührt) um ein Δs dreht mit $\Delta s = \ell \cdot \tan \alpha$. Leiten Sie hieraus den Zusammenhang $r \cdot \omega = v \cdot \tan \alpha$ zwischen Winkelgeschwindigkeit und Geschwindigkeit des Geschosses her. (r ist natürlich sein Radius.)

1.5. [5 Punkte] Wie gross ist die Geschwindigkeit des Projektils? (Falsche Lösung: $4.7 \cdot 10^2$)

1.6. [3 Punkte] Wie gross ist seine Winkelgeschwindigkeit? (Falsche Lösung: $1.2 \cdot 10^5$)

- 1.7. [4 Punkte] Wie gross ist sein Drehimpuls, und welche Richtung hat er, wenn man in Abb. 2 von vorne in den Lauf hinein sieht?
- 1.8. [2 Punkte] Ein Schuss wird 10° (zur horizontalen Richtung gemessen) nach oben geneigt abgegeben. Wie verändert sich die Richtung der Geschossachse, während das Geschoss der Wurfparabel folgt? Eine Skizze sollte hier mehr sagen als 1000 Worte 😊.
- 1.9. [2 Punkte] Welchen Effekt hat bei diesem Schuss der Luftwiderstand (qualitativ) sehr kurz nach dem Abfeuern?
- 1.10. [6 Punkte] Welchen Effekt hat bei diesem Schuss der Luftwiderstand (qualitativ) „einige Zeit“ nach dem Abfeuern, d. h., wenn das Geschoss bereits merklich der Parabelbahn gefolgt ist? Fertigen Sie eine Skizze an von dem Geschoss mit Drehimpulsvektor, Luftwiderstand usw.

2. **Relativistische Kinematik:** Ein Pion π^- zerfällt mit einer Halbwertszeit von $\tau = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ in ein Myon μ^- und ein Anti-Myon-Neutrino $\bar{\nu}_\mu$. Die Reaktionsgleichung schreibt man als $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Während das Neutrino praktisch masselos ist, hat das Pion eine Masse von $m_\pi = 273 \cdot m_e$ und das Myon eine Masse von $m_\mu = 207 \cdot m_e$ (also von 273 bzw. 207 Elektronenmassen). Betrachten Sie in der Folge den Zerfall eines ruhenden Pions und behandeln Sie ihn naturgemäss relativistisch.

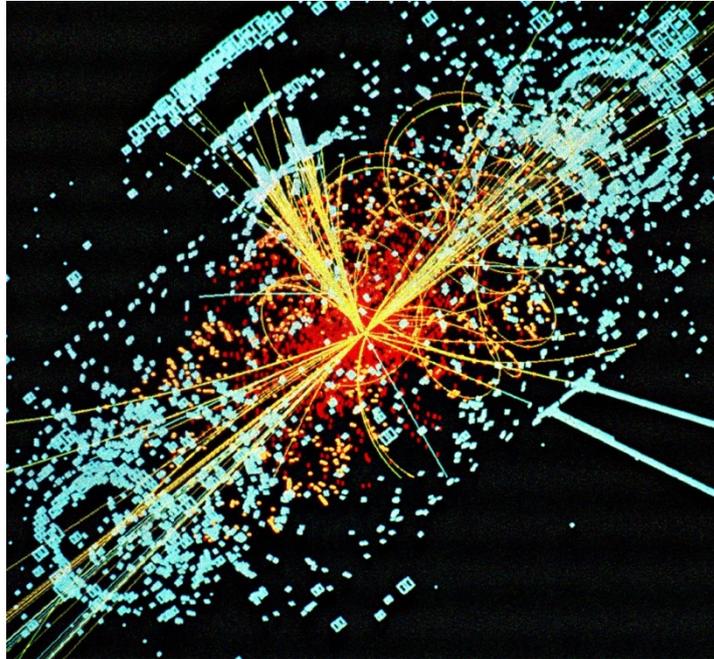


Abb.5: Teilchenkollision am CERN

- 2.1. [2 Punkte] Wie lautet der Energieerhaltungssatz dieser Reaktion?
- 2.2. [2 Punkte] Wie lautet der Impulserhaltungssatz dieser Reaktion?
- 2.3. [2 Punkte] Welcher einfache Zusammenhang zwischen Myon- und Neutrino-Impuls besteht daher?

2.4. [22 Punkte] Berechnen sie die Gesamtenergie (in J und in MeV), die kinetische Energie (in J und in MeV) und den Impuls jeweils sowohl des Myons als auch des Neutrinos. (Insgesamt sind also 10 Werte gesucht!) (Sie haben zwei Seiten zur Verfügung.) (Falsche Lösungen fürs Myon: Gesamtenergie $3.5 \cdot 10^{-11}$, kinetische Energie $3.25 \cdot 10^{-13}$, Impuls $3.2 \cdot 10^{-20}$)

2.5. [9 Punkte] Berechnen Sie die Werte γ , β und v des Myons.

3. **Bohrsches Atommodell:** Wir betrachten ein Atom, bei dem ein Elektron durch ein Myon (Masse von $m_\mu = 207 \cdot m_e$ (also 207 Elektronenmassen), Ladung $-e$) ersetzt wurde. Solche myonischen Atome werden aufgrund der Höhenstrahlung ständig in sehr geringen Mengen gebildet. Da das Myon eine mittlere Lebensdauer von nur $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ hat, existieren solche „exotischen Atome“ nicht lange. Machen wir trotzdem eine theoretische Betrachtung: Um einen Kohlenstoff-Kern ($Z=?$) kreise allein ein einzelnes Myon. D. h., es gibt auch keine weiteren Elektronen in diesem „exotischen Ion“. Benutzen Sie das Bohrsche Atommodell, um verschiedene Eigenschaften dieses „myonischen Ions“ zu berechnen. (Im Anhang finden Sie Ihnen bekannte Unterlagen zum Bohrschen Atommodell.)

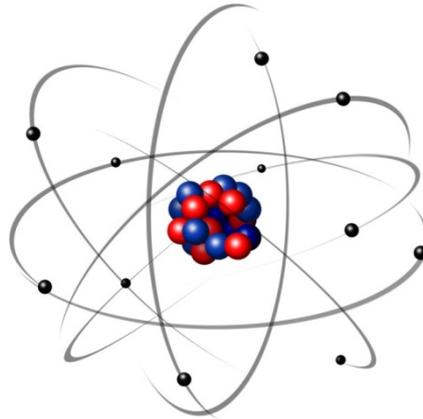


Abb. 6: Atom

- 3.1. [7 Punkte] Welches sind die ersten drei Energieniveaus (in eV)? (Falsche Lösung: $-5 \cdot 10^5, -3 \cdot 10^5, -2 \cdot 10^5$)

3.2. [5 Punkte] Welche drei Spektrallinien (in Hz) ergeben sich aufgrund dieser Energieniveaus?

3.3. [3 Punkte] Wie gross ist die Ionisationsenergie des Grundzustands (in eV)?

3.4. [4 Punkte] Wie gross ist der Ionenradius im Grundzustand? (Falsche Lösung: $2.1 \cdot 10^{-14}$)

3.5. [3 Punkte] Wie gross ist die Myonengeschwindigkeit im Grundzustand? (Falsche Lösung: $2.6 \cdot 10^7$)

3.6. [3 Punkte] Wie gross ist die potenzielle Energie des Myons im Grundzustand (in eV)?

3.7. [3 Punkte] Wie gross ist die kinetische Energie des Myons im Grundzustand (in eV)?

4. **Wellen-Teilchen-Dualismus:** Protonen und Photonen mit jeweils 5keV (kinetischer) Energie sollen vergleichend untersucht werden. Alle Rechnungen können nichtrelativistisch gemacht werden.

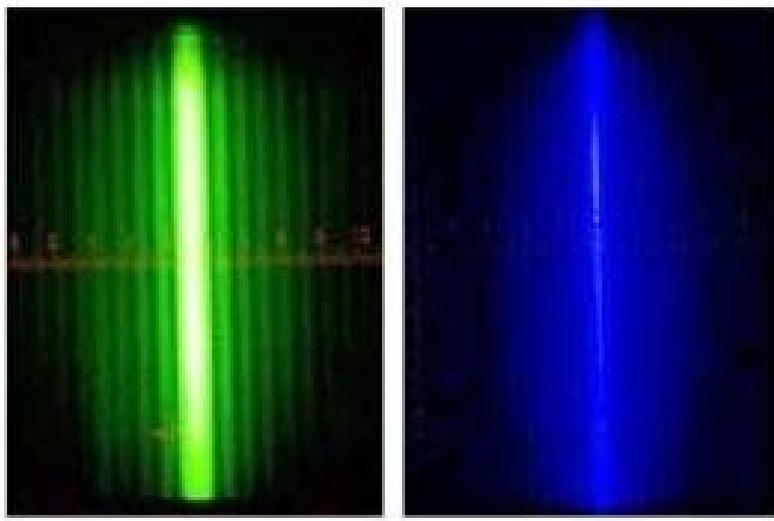


Abb. 7: Beugungsbilder

- 4.1. [6 Punkte] Wie gross sind Wellenlänge und Impuls des Photons? (Falsche Lösung: $2.5 \cdot 10^{-11}$, $5.4 \cdot 10^{-24}$)

4.2. [6 Punkte] Wie gross sind die Geschwindigkeiten von Photon und Proton? (Falsche Lösung: $10^7, 10^6$)

4.3. [6 Punkte] Wie gross sind Impuls und Wellenlänge des Protons? (Falsche Lösung: $3.2 \cdot 10^{-22}, 8.1 \cdot 10^{-14}$)

- 4.4. [8 Punkte] Wie breit müsste jeweils ein Beugungsspalt sein, wenn man das Maximum 1. Ordnung auf einem 1m entfernten Schirm 2mm vom 0. Maximum entfernt finden will?

5. **Relativitätstheorie:** Das Hubble-Teleskop macht immer faszinierendere Aufnahmen von den entferntesten Regionen des Universums.

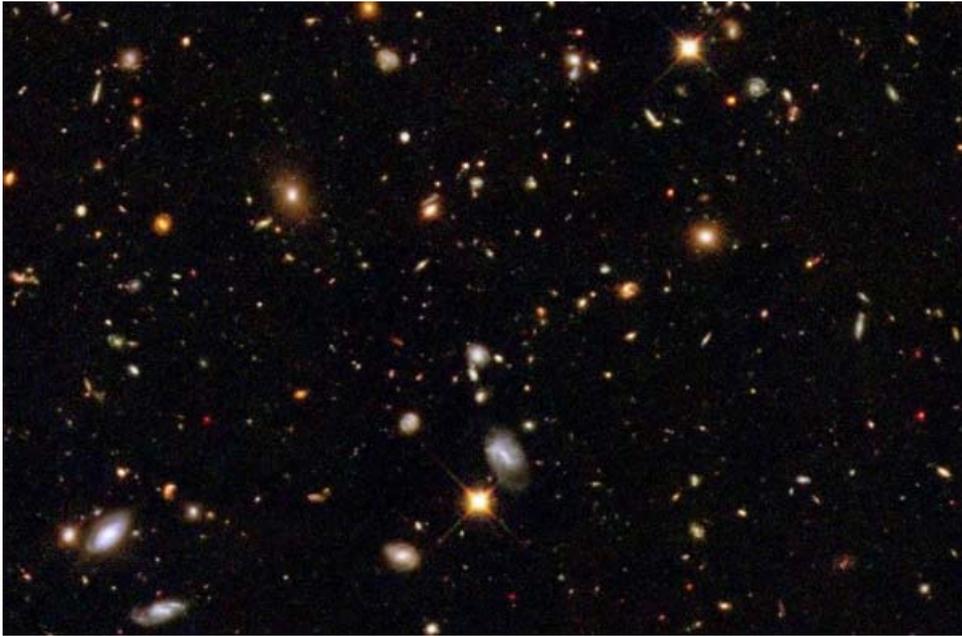


Abb. 8: Hubble Deep Field

- 5.1. [4 Punkte] Bei der am weitesten rotverschobenen Galaxie beobachtet man die 656nm-Linie des Wasserstoffs bei 4425nm. Berechnen Sie, wie schnell sich diese Galaxie relativ zu uns bewegt. Bewegt sie sich auf uns zu oder von uns weg? (Falsche Lösung: $2.5 \cdot 10^8$)

5.2. [3 Punkte] Berechnen Sie mit der Hubble-Konstanten $H_0 = 7.25 \cdot 10^{-11} \text{a}^{-1}$ unsere Entfernung von dieser Galaxie in Lichtjahren.

Anhang: Unterrichtsskript zum Bohr'schen Atommodell

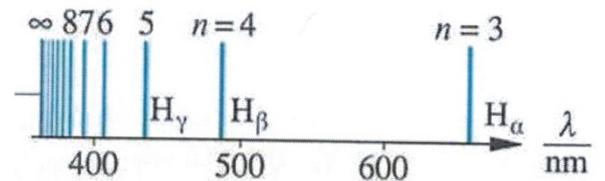
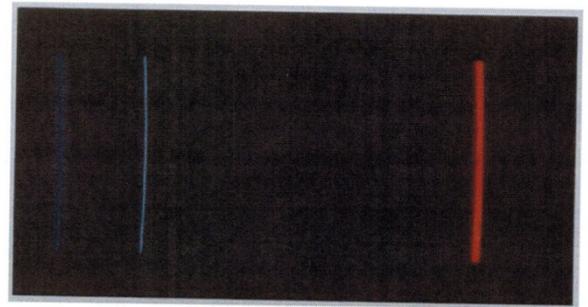
Berechnungen und Notizen in diesem Anhang werden nicht bewertet!

Das Bohrsche Atommodell

Eine empirische Formel (Balmer 1885) für die Frequenzen des Wasserstoff-Spektrums (im sichtbaren Bereich) ist

$$f = 3.28 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

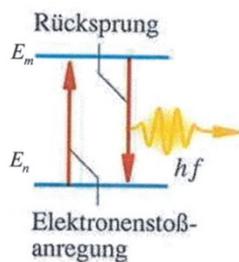
n	f[10 ¹⁴ Hz]	λ[nm]	Farbe
3	4.56	659	hellrot
4	6.15	488	hellblau
5	6.89	436	dunkelblau
6	7.29	412	violett
7	7.53	398	UV
...	...		
∞	8.20	366	UV



1

2

Bohrs Annahme: Es gibt „erlaubte“ Bahnen, auf denen die Elektronen kreisen können, ohne zu strahlen. Beim Übergang von einer Bahn höherer zu einer Bahn niedrigerer Energie wird die Energiedifferenz als Photon abgegeben.

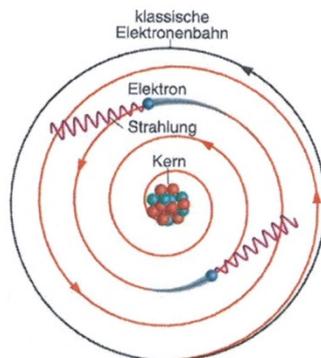


Erstes Bohrsches Postulat: Elektronen auf erlaubten Bahnen haben einen Drehimpuls

$$L_n = m_e \cdot r_n \cdot v_n = n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Zweites Bohrsches Postulat: Beim Übergang von der Bahn mit Energie E_m zur Bahn der Energie E_n wird ein Photon emittiert mit der Energie

$$h \cdot f = E_m - E_n$$



3

4

Was liefert die Kreisbahnbedingung $F_Z = F_C$ für ein Elektron mit dem Drehimpuls L_n ?

$$F_Z = F_C$$

$$\Rightarrow \frac{m_e \cdot v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_n^2}$$

$$\Rightarrow m_e \cdot v_n^2 \cdot r_n = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow (m_e \cdot v_n \cdot r_n) \cdot v_n = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow L_n \cdot v_n = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{n \cdot h}{2 \cdot \pi} \cdot v_n = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$$

\Rightarrow

$$v_n = \frac{e^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot n \cdot h}$$

5

Gesamtenergie:

$$E_n = E_{k,n} + E_{p,n}$$

7

$$\left. \begin{aligned} v_n &= \frac{e^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot n \cdot h} \\ L_n &= m_e \cdot r_n \cdot v_n = n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$m_e \cdot r_n \cdot \left(\frac{e^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot n \cdot h} \right) = n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi}$$

$$\Rightarrow$$

$$r_n = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot e^2 \cdot m_e} \cdot n^2$$

Für $n=1$ ergibt sich der Bohrsche Radius:

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot e^2 \cdot m_e} = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

6

Kinetische Energie:

$$E_{k,n} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_n^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot \left(\frac{e^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot n \cdot h} \right)^2$$

$$= \frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot n^2 \cdot h^2}$$

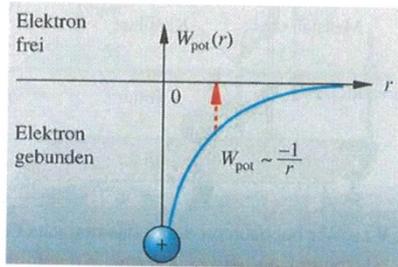
8

Potenzielle Energie:

$$E_{p,n} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{e \cdot (-e)}{r_n}$$

$$= \frac{-e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_n}$$

$$= \frac{-e^4 \cdot m_e}{4 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2}$$



9

Gesamtenergie:

$$E_n = E_{k,n} + E_{p,n}$$

$$= \frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot n^2 \cdot h^2} + \frac{-e^4 \cdot m_e}{4 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2}$$

$$= \frac{-m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$= -13.6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Die Energie des Grundzustands (n=1) beträgt

$$E_1 = -13.6 \text{ eV}$$

10

Ein Sprung von Bahn n nach Bahn m < n bedeutet für das Atom den „Energieverlust“

$$E_m - E_n = -13.6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{m^2} - \left(-13.6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2} \right)$$

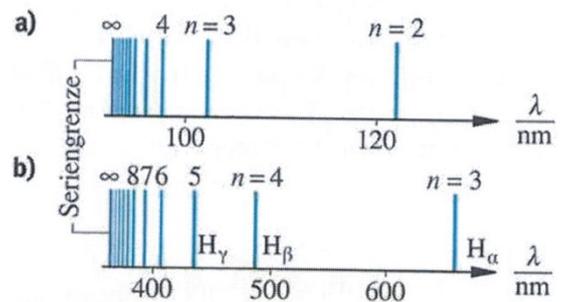
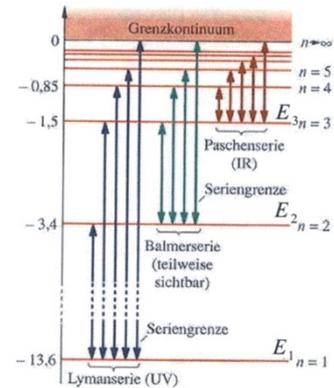
$$= -13.6 \text{ eV} \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

und setzt ein Photon frei mit der Energie

$$h \cdot f = E_n - E_m$$

$$= 13.6 \text{ eV} \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

11



12

Für $m=2$ erhält man die Balmer-Formel:

$$\begin{aligned}h \cdot f &= 13.6\text{eV} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\ \Rightarrow f &= \frac{13.6\text{eV}}{h} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= 3.28 \cdot 10^{15} \text{Hz} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

13

Bohrsches Atommodell:

Dem Elektron im Wasserstoffatom sind (nur) Bahnen mit bestimmtem Drehimpuls erlaubt (Drehimpulsquantisierung):

$$L_n = n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi}$$

Kreisbahnbedingung:

$$\frac{m_e \cdot v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_n^2}$$

Potentielle Energie des Elektrons:

$$E_{p,n} = \frac{-e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_n}$$

Hieraus folgt für die Gesamtenergie des Elektrons:

$$E_n = -13.6\text{eV} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Und hieraus folgt die Balmer-Formel

$$f = 3.28 \cdot 10^{15} \text{Hz} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

14

Abbildungsverzeichnis:

Abb. 1: James Bond, entnommen am 29.03.2013 von
<http://www.photoshop-cafe.de/forum/t1782-james-bond-effekt-und-schrift.html>

Abb. 2: Gezogener Lauf, entnommen am 29.03.2013 von
<http://www.pbportal.de/forum/showthread.php?t=259636>

Abb. 3: Querschnitt einer Schusswaffe, entnommen am 29.03.2013 von
[http://de.wikipedia.org/wiki/Lauf_\(Schusswaffe\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Lauf_(Schusswaffe))

Abb. 4: Eine Patrone 7.92 x 57 mm, entnommen am 29.03.2013 von
[http://de.wikipedia.org/wiki/Lauf_\(Schusswaffe\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Lauf_(Schusswaffe))

Abb.5: Teilchenkollision am CERN, entnommen am 30.03.2013 von
http://www.gridpp.ac.uk/pics/stand2004/cms_higgs.jpg

Abb. 6: Atom, entnommen am 31.03.2013 von
http://www.simplyscience.ch/tl_files/content/Bilder%20Import/Stories/Strom%20aus%20dem%20Atom/Atom.jpg

Abb. 7: Beugungsbilder, entnommen am 31.03.2013 von
http://www.google.de/imgres?hl=de&biw=1920&bih=950&tbm=isch&tbnid=3puFD8PB10kOHM:&imgrefurl=http://www.uni-jena.de/Versuch_410.html&docid=7BZs7g7K7thh6M&imgurl=http://www.uni-jena.de/unijenamedia/Bilder/faculties/physik_astro/phys_gp/Versuche/410_1-width-550-height-383.jpeg&w=550&h=383&ei=WfhVUd21FeyN4gTOx4GQBg&zoom=1&iact=rc&dur=520&page=2&tbnh=135&tbnw=189&start=46&ndsp=54&ved=1t:429,r:46,s:0,i:262&tx=65&ty=22

Abb. 8: Hubble Deep Field, entnommen am 29.03.2013 von
<http://blogs.scientificamerican.com/degrees-of-freedom/files/2011/11/HubbleDeepField-600.jpg>